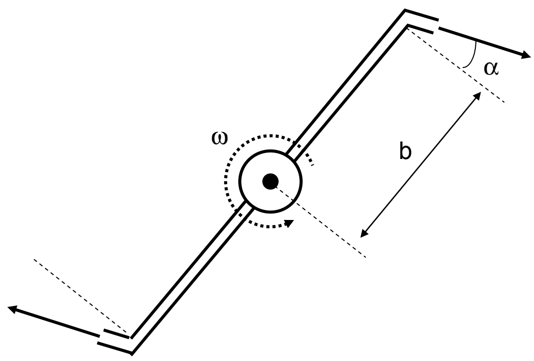
Travaux dirigés de Mécanique n°7

Cinématique

Exercice 1 : Tourniquet hydraulique

Les beaux jours revenant, Mr P décide d'arroser son jardin. Il utilise un tourniquet hydraulique constitué de deux bras symétriques, de longueur b, qui tournent autour d'un axe vertical avec la vitesse angulaire ω. (Voir avec lui pour l'étude de l'intérêt du système ainsi que pour le torseur des contraintes au niveau de la liaison pivot). L'eau est éjectée par les extrémités des bras avec une vitesse par rapport aux bras égale à $\vec{u}$ et faisant un angle α avec la normale aux bras.

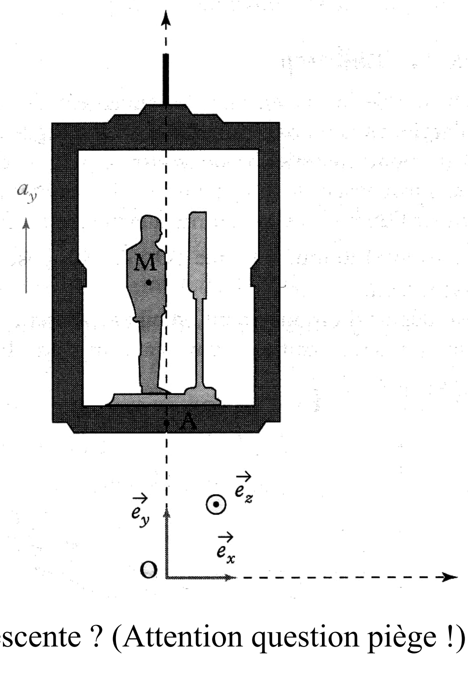


1. Exprimer la vitesse $\vec{v}$ de l'eau par rapport au référentiel terrestre au moment de l'éjection. On donnera $\vec{v}$ en fonction de u, ω, b et des vecteurs unitaires $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$ de la base polaire.
2. A quelle condition sur ω, $\vec{v}$ est-elle radiale ?
3. Monsieur P sera-t-il mouillé ?

Référentiels en translation

Exercice 2 : Petit poids dans un ascenseur.

Adepte de Fred et Jamy, Mr P décide de réitérer une de leurs expériences. Il se dirige alors dans un ascenseur avec un pèse personne à aiguille (qu'il a trouvé à 3,14€ dans un vide grenier) pour suivre l'évolution de son poids au cours du trajet de l'ascenseur. On étudie l'indication donnée par cette balance. On considèrera que la masse de Stéphane est m=70kg.

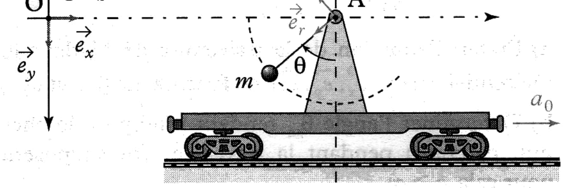


Le mouvement de l'ascenseur entre 2 étages se fait en 3 phases :
- Une phase d'accélération constante : $a_y=3m.s^{-2}$.
- Une phase à vitesse constante v_y=cte.
- Une phase de décélération constante : $a_y=-3m.s^{-2}$.

On suppose le référentiel terrestre galiléen.

a) Déterminer la réaction du pèse-personne sur Stéphane en fonction de m, g et a_y.
b) En déduire les valeurs indiquées par le pèse personne au cours des différentes phases.
c) Vaut-il mieux porter ses livres de Math à la montée ou à la descente ? (Attention question piège !)

Exercice 3 : Pendule composé.

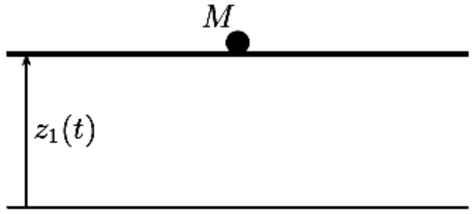


On étudie un pendule constitué d'une masse m repérée par l'angle θ supposé constant et d'un fil inextensible, de masse négligeable et de longueur l (le fil restant tendu). On suppose que le référentiel terrestre est galiléen.

Le pendule est fixé sur un wagon de train possédant une accélération horizontale a_0=cte.

a) Déterminer la relation entre a_0 et θ.
b) Discuter le signe de θ suivant celui de a_0.

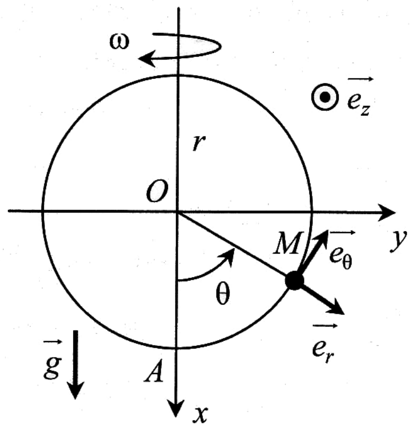
Exercice 4 : Masse posée sur un plateau oscillant.



Un plateau horizontal est animé d'un mouvement de translation verticale (g=9,81m.s^{-2}) rectiligne et sinusoïdal (imposé par un moteur) décrit par l'équation $z_1 = A\cos\omega t$ avec A=10cm. Un petit palet est posé à t=0 sur le plateau, sa masse m est assez faible pour ne pas modifier le mouvement du plateau. On travaillera dans $\mathfrak{R}'$ le référentiel lié au plateau.

1. En supposant que le palet reste au contact du plateau, faire le bilan des forces appliquées au palet et expliciter une condition sur N, la norme de la réaction du plateau, qui exprime que le palet reste en contact avec le plateau.
2. Calculer, littéralement et numériquement, la fréquence critique ν_0 au dessous de laquelle le contact est maintenu pour toute valeur de t.

Référentiels en rotation



Exercice 5 : Anneau coulissant sur un cercle en rotation.

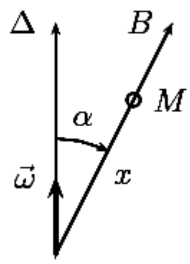
Un guide circulaire de centre O et de rayon r est en rotation uniforme, caractérisée par $\vec{\Omega} = \omega\vec{e_x}$, autour de son diamètre vertical (Ox), par rapport au référentiel terrestre galiléen $\mathcal{R}$. Le référentiel d'étude est le référentiel C lié au cercle : le repère Oxyz est lié à ce référentiel.
Un anneau de masse m, assimilé à un point matériel M, est astreint à coulisser sans frottement sur la circonférence. Son mouvement dans C est repéré par un seul degré de liberté cinématique, l'angle θ entre $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$. On note $\vec{g} = +g\vec{e_x}$ le champ de pesanteur, et $\vec{R}$ la réaction du cercle sur M.

1. Faire la liste complète des forces qui s'exercent sur M dans le référentiel C les représenter sur un schéma. Donner les composantes de ces forces (connues ou inconnues) dans la base ($\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z}$).
2. Ecrire le principe fondamental de la dynamique pour M dans ce référentiel, et en déduire l'équation différentielle vérifiée par θ(t), ainsi que l'expression de $\vec{R}$ en fonction de θ, de ses dérivées et des paramètres du problème.
3. Indiquer la ou les position(s) d'équilibre de M dans ce référentiel. A quelle condition existent-elles ?

Exercice 6 : Equilibre d'un anneau sur une tige en rotation.

Une tige OB de longueur l est fixée au point O à un axe Δ vertical avec lequel elle fait un angle α constant (cf. figure). Un petit anneau de masse m, considéré comme ponctuel, peut se déplacer sans frottement sur la tige OB. Soit M sa position repérée par $OM=x$.

L'ensemble tourne autour de l'axe Δ avec une vitesse angulaire ω.

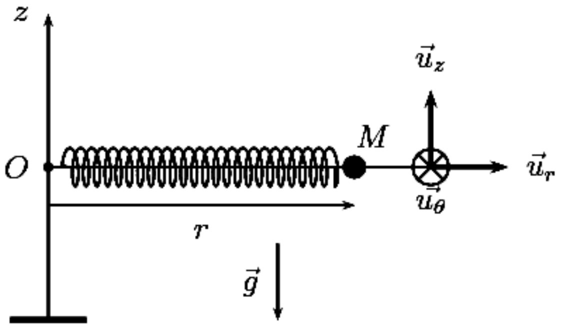


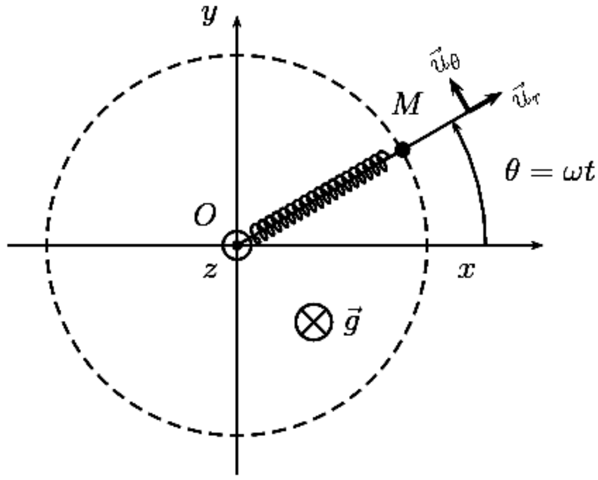
1. Montrer qu'il ne peut exister une position d'équilibre de l'anneau sur OB, x_e à déterminer, que si la vitesse angulaire est supérieure à une valeur seuil ω_0 que l'on déterminera.
2. Donner, dans ce cas, les composantes de la réaction $\vec{R}$ de la tige sur l'anneau dans la base cylindrique.
3. Que se passe-t-il si on écarte légèrement l'anneau de sa position d'équilibre ?

Exercice 7 : Tige en rotation.

On considère un mobile quasi ponctuel *M*, de masse *m* qui peut se déplacer sans frottement le long d'un axe (*OM*) toujours horizontal et mis en rotation uniforme autour de l'axe *Oz* vertical. La vitesse angulaire étant nommée $\omega = \dot{\theta} = cte$.

Le point *M* est relié à *O* par l'intermédiaire d'un ressort de raideur *k* et de longueur à vide r_0, on a représenté la base cylindro polaire mobile sur les figures.

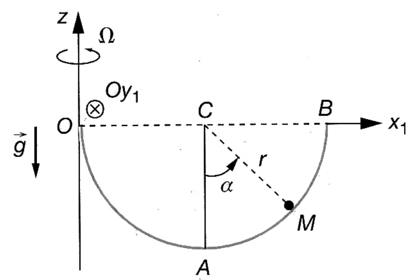




1. *Mouvement circulaire uniforme :* dans un premier temps, on suppose que *M* est immobile par rapport à la tige en rotation, c'est à dire qu'il est animé d'un mouvement circulaire uniforme de rayon r_e dans le référentiel lié au sol que l'on considèrera comme galiléen.
   Déterminer l'expression de r_e en fonction des données. On utilisera le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel lié à la tige en rotation.

2. *Mouvement hors équilibre :* on étudie maintenant le mouvement de *M* autour de sa position d'équilibre sur la tige en rotation. On posera $x = r - r_e$.
   a. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par *r*. En déduire celle vérifiée par *x*.
   b. Exprimer la pulsation Ω et la période T des oscillations du cylindre en fonction de ω.

Exercice 8 : Stabilité d'un équilibre relatif.



Une bille M (masse m) est susceptible de glisser sans frottement sur un rail en forme de demi-cercle de centre C et de rayon r. La position du point M est repérée par l'angle α.

Le rail OAB tourne autour de l'axe vertical Oz avec une vitesse angulaire Ω constante. On note R_1 le référentiel de repère (Ox_1, Oy_1, Oz) lié au rail OAB. On pose $\omega_0^2 = g/r$.

1. La bille se trouve en équilibre par rapport à R_1 pour $\alpha=\alpha_e$. Quelle est la relation entre ω_0, Ω et α_e.
2. On veut étudier la stabilité de l'équilibre obtenu en examinant les petits mouvements au voisinage de cet équilibre : soit $\alpha=\alpha_e+\varepsilon$, avec $\varepsilon \ll 1$. Etablir l'équation du mouvement satisfaite par ε. L'équilibre est-il stable ? Déterminer la période T des petites oscillations.

Exercice 9 : Equilibre dans une gouttière parabolique.

On considère une gouttière d'équation plane $y=ax^2$ par rapport à un repère Oxy (Oy vertical). Dans cette gouttière, on place un point matériel de masse m. On fait tourner la gouttière autour de l'axe Oy à la vitesse angulaire constante ω.
Trouver la valeur que doit avoir ω pour que le point puisse être en équilibre relatif lorsqu'on le déplace en un point quelconque de la gouttière sans vitesse initiale relative.

Mécanique terrestre.

Exercice 10 : Force de Coriolis sur un train.

Un train à grande vitesse, de masse $m=7{,}8.10^5$ kg, circule d'ouest en est entre Paris et Metz à la vitesse constante $v = 320$km/h. A l'instant considéré, il se trouve à proximité hauteur de la gare Meuse TGV à la latitude $\lambda = 49°$ Nord. Au point P où se situe le train, on définit une base orthonormale $(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ avec $\vec{e}_x$ vers l'est, $\vec{e}_y$ vers le nord et $\vec{e}_z$ vers le zénith.

1. Faire un schéma où apparaissent la Terre (en coupe), la base ci-dessus au point P, le vecteur vitesse du train et le vecteur rotation de la Terre $\mathbf{\Omega}$.
2. Déterminer la force de Coriolis qui s'exerce sur le train dans le référentiel terrestre, et comparer sa norme à celle du poids du train. On donne : $\Omega = 7{,}3.10^{-5}$rad/s ; $g = 9{,}8$ m.s^{-2}.
3. Faire un schéma local du train, vu de l'arrière, et représenter les différentes forces subies. Lequel des deux rails s'use le plus ? Qu'est-ce qui change quand le train va vers l'ouest ?