Les objectifs sur les séries entières sont :

- vérifier les méthodes d'obtention du rayon de convergence (pas toujours avec la règle de D'Alembert appliquée aux séries numériques),
- connaitre les développements usuels et savoir les utiliser pour obtenir un développement en série entière en 0 d'une fonction,
- maitriser les calculs élémentaires permettant d'obtenir une expression simplifiée de la fonction somme d'une série entière,
- déterminer les solutions d'une équation différentielle **simple** qui sont développables en série entière, utiliser la méthode de l'équation différentielle pour obtenir une expression simplifiée de la fonction somme d'une série entière.

Séries Entières à coefficients réels ou complexes

1) Rayon de convergence d'une série entière
   (a) Définition d'une série entière ;
   (b) Lemme d'Abel
   (c) Rayon de convergence défini comme $R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \ , \ (a_n r^n) \text{ est bornée } \}$
   (d) Convergence d'une série entière :
      - ⋆ Si $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument et si $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.
      - ⋆ On a alors aussi $R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \ , \ \sum |a_n| r^n \text{ converge } \}$ et $R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \ , \ (a_n r^n) \text{ converge vers } 0 \ \}$;
      - ⋆ ***La règle de D'Alembert relative aux séries entières est Hors-Programme, mais on pourra se ramener à la règle de D'Alembert sur les séries numériques en posant un*** $r > 0$ ***et en étudiant la convergence de la série numérique*** $\sum |a_n| r^n$
   (e) Disque ouvert de convergence, intervalle ouvert de convergence ;
   (toute étude systématique de la convergence sur le cercle est exclue)
   (f) Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_a et R_b :
      - ⋆ Si $|a_n| \leqslant |b_n|$, alors $R_b \leqslant R_a$
      - ⋆ Si $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} |b_n|$, alors $R_a = R_b$
   (g) Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.
   (h) Opérations algébriques : somme de deux séries entières, produit par un scalaire ;
   (La notion de série produit est Hors-Programme)

2) Fonction somme d'une série entière d'une variable réelle :
   (a) Fonction somme, domaine de définition ;
   (b) Propriétés *(Admises)* de la fonction somme d'une série entière sur l'intervalle (ouvert) de convergence : continuité, dérivation, classe $\mathcal{C}^\infty$ et intégration terme à terme (conservation du rayon de convergence).
   (Notion de prolongement par continuité aux bornes de l'intervalle ouvert de convergence Hors-Programme)

3) Développement en série entière autour de 0
   (a) Définition d'une fonction développable en série entière au voisinage de 0 ;
   (b) Unicité du développement en série entière, lien avec la série de Taylor de f au voisinage de 0 ;
   (c) Développements usuels en série entière :
   $e^x \ , \ \cos x \ , \ \sin x \ , \ \dfrac{1}{1+x} \ , \ \dfrac{1}{1-x} \ , \ \ln(1+x) \ , \ \ln(1-x) \ , \ \operatorname{Arctan} x \ , \ (1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (Les fonctions ch *et* sh *ne sont pas au programme de TSI)*
   $\forall z \in \mathbb{C} \ , \ |z| < 1 \ , \ \dfrac{1}{1-z} = \sum_{n \geqslant 0} z^n$

4) Exponentielle complexe
   Expression *(Admise)*, pour $z \in \mathbb{C}$, de $\exp(z)$ comme somme de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} \dfrac{z^n}{n!}$