Réduction des endomorphismes en dimension finie + SRL2

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) Éléments propres, Polynôme caractéristique :
   (a) Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'un endomorphisme et interprétation en terme de droite vectorielle stable. (Idem avec les matrices)
   (b) les sous-espaces propres sont en somme directe
   (c) Polynôme Caractéristique d'un endomorphisme, d'une matrice :
   Définition $\chi_f : x \mapsto \det(xId_E - f)$, $\chi_A : x \mapsto \det(xI_n - A)$, degré, coefficient dominant : 1, coefficient constant : $(-1)^n \det(f)$ (resp. $(-1)^n \det(A)$), coefficient en x^{n-1} : $-\mathrm{Tr}(f)$ (resp. $-\mathrm{Tr}(A)$)
   Ses racines sont les valeurs propres de l'endomorphisme ou de la matrice,
   Lien entre endomorphisme et matrice : Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, mais la réciproque est fausse.
   (d) Ordre de multiplicité des valeurs propres : Définition,
   L'ordre de multiplicité d'une valeur propre est minoré par la dimension du sous-espace propre associé.
2) Diagonalisation :
   (a) Définition d'un endomorphisme diagonalisable, existence d'une base de vecteurs propres ;
   (b) Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable (Condition Suffisante),
   ie tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé, à racines simples sur $\mathbb{K}$ est diagonalisable.
   (c) Caractérisations équivalentes au choix : (Condition Nécessaire et Suffisante)
      - ⋆ La somme des sous-espaces propres est E
      - ⋆ La somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de E
      - ⋆ Le polynôme caractéristique est scindé et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre associé.
   (d) Extension au cas des matrices, exemples avec des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang faible.
3) Trigonalisation :
   (a) Définition d'un endomorphisme (d'une matrice) trigonalisable,
   (b) Tout endomorphisme (resp. matrice) est trigonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. (ie il existe une base de E telle que la matrice associée à l'endomorphisme soit triangulaire (resp. la matrice est semblable à une matrice triangulaire))
   Aucune technique de trigonalisation n'étant au programme, l'énoncé doit orienter les élèves dans leur démarche.
   Pour le cas de la dimension 3, les élèves doivent pouvoir proposer des choses seuls.
   (c) Expression du déterminant et de la trace d'un endomorphisme trigonalisable en fonction de ses valeurs propres.
4) Application au calcul de puissances de matrices :
   Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable, ou trigonalisable *(indication pour la trigonalisation)*
   En utilisant un polynôme annulateur de la matrice. *(l'élève doit être guidé par l'énoncé)*
   (Attention, le théorème de Cayley-Hamilton et la notion de polynôme minimal ne sont pas au programme)
   Application à la résolution de systèmes de la forme $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
5) Application aux suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants :
   On se limitera aux relations de la forme $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$
   (a) Traduction matricielle sous la forme $X_{n+1} = AX_n$
   (b) Structure de l'ensemble des solutions, équation caractéristique, base de solutions.
   (c) Expression des solutions directement à partir de la résolution de l'équation caractéristique.

Bonnes vacances à tous et merci pour le travail déjà accompli

Par avance, meilleurs vœux pour cette nouvelle année !