Le sujet de khôlle comportera au moins 2 exercices, dont un sur les intégrales généralisées. Chaque étudiant devra aborder les deux exercices proposés.

Intégrales généralisées

L'exercice traitera de l'étude de la convergence d'une intégrale généralisée, puis nécessitera un changement de variable ou IPP pour la calculer ou pour trouver la nature d'une autre intégrale.

Révision des programmes de khôlles 3 et 4(Algèbre linéaire)

Cette partie vient en support de la réduction d'endomorphismes, elle ne doit donc pas représenter un exercice à elle seule.

Réduction des endomorphismes en dimension finie

Pour ce premier passage *sur la réduction d'endomorphismes, il est important de* ***vérifier la connaissance et la maîtrise des objets manipulés****. Par ailleurs,* ***la difficulté doit être modérée****. Réserver les cas en dimension n ou les cas plus théoriques comme compléments si le reste est bien réalisé.*

1) Éléments propres, Polynôme caractéristique :
   (a) Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'un endomorphisme et interprétation en terme de droite vectorielle stable. (Idem avec les matrices)
   (b) les sous-espaces propres sont en somme directe
   (c) Polynôme Caractéristique d'un endomorphisme, d'une matrice :
   Définition $\chi_f : x \mapsto \det(xId_E - f)$, $\chi_A : x \mapsto \det(xI_n - A)$, degré, coefficient dominant : 1, coefficient constant : $(-1)^n \det(f)$ (resp. $(-1)^n \det(A)$), coefficient en x^{n-1} : $-\mathrm{Tr}(f)$ (resp. $-\mathrm{Tr}(A)$)
   Ses racines sont les valeurs propres de l'endomorphisme ou de la matrice,
   Lien entre endomorphisme et matrice : Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, mais la réciproque est fausse.
   (d) Ordre de multiplicité des valeurs propres :
   Définition,
   L'ordre de multiplicité d'une valeur propre est minoré par la dimension du sous-espace propre associé.
2) Diagonalisation :
   (a) Définition d'un endomorphisme diagonalisable, existence d'une base de vecteurs propres ;
   (b) Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable (Condition Suffisante),
   ie tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé, à racines simples sur $\mathbb{K}$ est diagonalisable.
   (c) Caractérisations équivalentes au choix : (Condition Nécessaire et Suffisante)
   - ⋆ La somme des sous-espaces propres est E
   - ⋆ La somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de E
   - ⋆ Le polynôme caractéristique est scindé et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre associé.

   (d) Extension au cas des matrices
   Des exemples avec des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang faible ont été traités.
3) Application au calcul de puissances de matrices :
   Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable
   Application à la résolution de systèmes de la forme $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

