

Intégration sur un segment

Intégrales généralisées

1) Intégrale généralisée

(a) Sur l'intervalle borné

i. Définition d'une intégrale généralisée convergente dans le cas d'une fonction continue sur l'intervalle borné $[a, b[$, ou $]a, b]$;

ii. Exemples fondamentaux : $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ (Intégrales de Riemann) , $\int_0^1 \ln t dt$.

iii. Cas d'une fonction prolongeable par continuité en b (resp. en a).

(b) Sur l'intervalle non borné

i. Définition d'une intégrale généralisée convergente dans le cas d'une fonction sur l'intervalle non borné $[a, +\infty[$, ou $] - \infty, b]$;

ii. Exemples fondamentaux : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ (Intégrales de Riemann) , $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$.

(c) Définition d'une intégrale généralisée divergente.

2) Propriétés sur les intégrales généralisées :

(a) Convergence ou divergence de $\int_a^b f(t)dt$ par l'étude de la limite d'une primitive de f .

(b) Relation de Chasles, Intégrales plusieurs fois généralisées.

(c) Linéarité, positivité;

(d) Théorème de changement de variable;

(e) Intégration par parties (*se ramener sur un segment, puis passer à la limite pour conclure que l'on a deux intégrales de même nature*)

3) Intégrales des fonctions positives

(a) Critère de convergence (ex : $\int_a^b f(t)dt$ converge ssi $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ majorée);

(b) Critère de comparaison, d'équivalence : relation entre la convergence ou la divergence des intégrales de f et g sur $[a, b[$, lorsque $0 \leq f \leq g$ au voisinage de b , ou $f = o(g)$, ou $f = O(g)$, ou $f \sim g$;
(Pour $f \sim g$, les étudiants doivent absolument signaler que g de signe constant au voisinage de b)

(c) Adaptation de ces critères de convergence au cas des autres intervalles.

(d) Propriété de nullité dans le cas d'une fonction positive, continue sur $[a, b[$, telle que $\int_a^b f(t)dt = 0$

4) Intégrales absolument convergentes

(a) Définition d'une intégrale généralisée absolument convergente;

(b) Une intégrale absolument convergente est convergente (Admis);

(c) Définition d'une intégrale généralisée semi-convergente; Ex : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

(d) Comparaison en module à des fonctions réelles positives : $|f| \leq g$, $|f| = o(g)$, $|f| = O(g)$, $f \sim g$.

(e) Règle du t^α dans des cas simples. (*pas explicitement au programme, mais bien utile parfois !*)

QUESTIONS DE COURS : Identiques à la semaine passée

Possibilité de mixer les sous-questions pour proposer de nouvelles questions de cours