Travaux dirigés Signaux n°4. Oscillateur harmonique

Exercices d'application directe

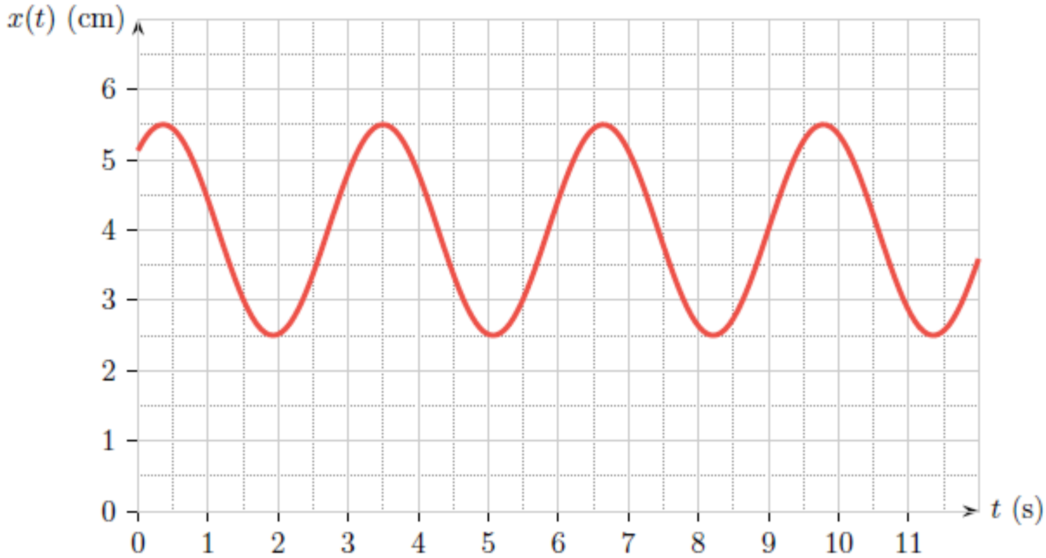
Exercice 1 : Mesure de masse en apesanteur

En apesanteur, les dispositifs usuels de mesure de masse ne sont pas fonctionnels suite à l'absence de gravité. Il est possible d'utiliser un système original, constitué d'une chaise attachée à l'extrémité d'un ressort. L'autre extrémité du ressort est liée à un point fixe du vaisseau. La constante de raideur du ressort est $k = 606\ \mathrm{N.m^{-1}}$

1. Rappeler l'expression de la période propre d'un système masse-ressort en fonction de k et m.
2. Quand la capsule est arrimée dans sa base de lancement, la chaise vide oscille avec la période $T = 1{,}28$ s. Calculer la masse m_0 de la chaise.
3. Quand la capsule est en orbite autour de la Terre, l'astronaute s'assoit sur la chaise et mesure la période $T' = 2{,}33$ s. Quelle est la masse m de l'astronaute ?

Exercice 2 : Caractéristiques d'un oscillateur

1. Déterminer l'amplitude, la période, la fréquence et la valeur moyenne du signal représenté ci-dessous.



2. Il s'agit en fait de la longueur $x(t) = l(t)$ d'un ressort de constante de raideur k, relié à un point M de masse $m = 20$ kg. La masse se déplace horizontalement.
   a. Déterminer graphiquement la valeur de la position d'équilibre x_{eq}.
   b. Déterminer graphiquement la valeur maximale de la vitesse du mobile.
   c. Estimer la valeur de la constante de raideur k.

Exercice 3 : Exemples d'oscillateurs

1. On considère un système masse-ressort vertical dans le champ de pesanteur : une masse m est suspendue à un ressort idéal (masse négligeable, longueur à vide l_0, raideur k), accroché au point fixe O. L'équation donnant l'évolution de l'altitude z(t) de la masse par rapport à l'altitude du point O pris comme référence s'écrit : $m\ddot{z} = -k(z - l_0) + mg$ où g est l'accélération de la pesanteur.

   a. Mettre cette équation sous forme canonique.
   b. En déduire l'expression de la période des oscillations de la masse ainsi que sa position d'équilibre.

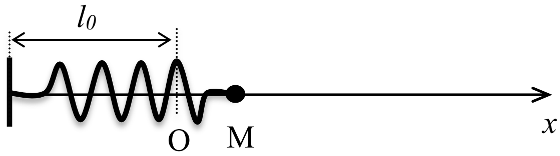
2. On considère un pendule pesant : une barre homogène de masse m, de longueur $2L$ est accrochée en une de ses extrémités à un point fixe O. Si la liaison en O est parfaite, l'équation donnant l'évolution de l'angle θ que fait la direction de la barre avec la verticale s'écrit alors :

$$\frac{4}{3}mL^2\ddot{\theta} = -mgL\sin(\theta)$$

   a. Cette équation est-elle du type oscillateur harmonique ?
   b. Comment est-elle modifiée si l'on considère que les oscillations du pendule sont limitées aux petits angles ?
   c. En déduire, dans ce dernier cas, l'expression de la période des oscillations ainsi que la position d'équilibre.

Exercice 4 : Oscillations harmoniques

Un point matériel M de masse m est astreint à se déplacer **sans frottement** sur une tige, le long de l'axe (Ox) horizontal. Il est lié à l'extrémité d'un ressort de raideur ***k*** et de longueur à vide l_0, l'autre extrémité étant fixe.

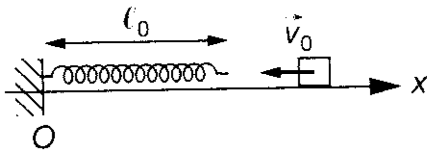


On note $\overrightarrow{u_x}$ le vecteur unitaire de l'axe Ox tel que $\overrightarrow{OM} = x(t)\overrightarrow{u_x}$. A l'équilibre, le solide occupe la position O d'abscisse $x = 0$.

1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ et définir la pulsation propre de ce système.
2. A l'instant $t = 0$, on écarte M du point O d'une distance X_0 et on le lâche sans vitesse initiale. Donner l'évolution exacte de sa position $x(t)$.
3. Entre quelles abscisses extrémales évolue la masse ?
4. Quelle est la période du mouvement ?
5. Tracer la variation de cette fonction au cours du temps en indiquant les points remarquables.

Exercice 5 : Amplitude des oscillations d'une masse*

Un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 fixé en O est initialement détendu. Une masse m de vitesse $\vec{v} = -v_0\overrightarrow{u_x}$ arrive de la droite et s'accroche au ressort. Le mobile est décrit par son abscisse $x(t)$.



On s'intéresse au système {masse + ressort}.

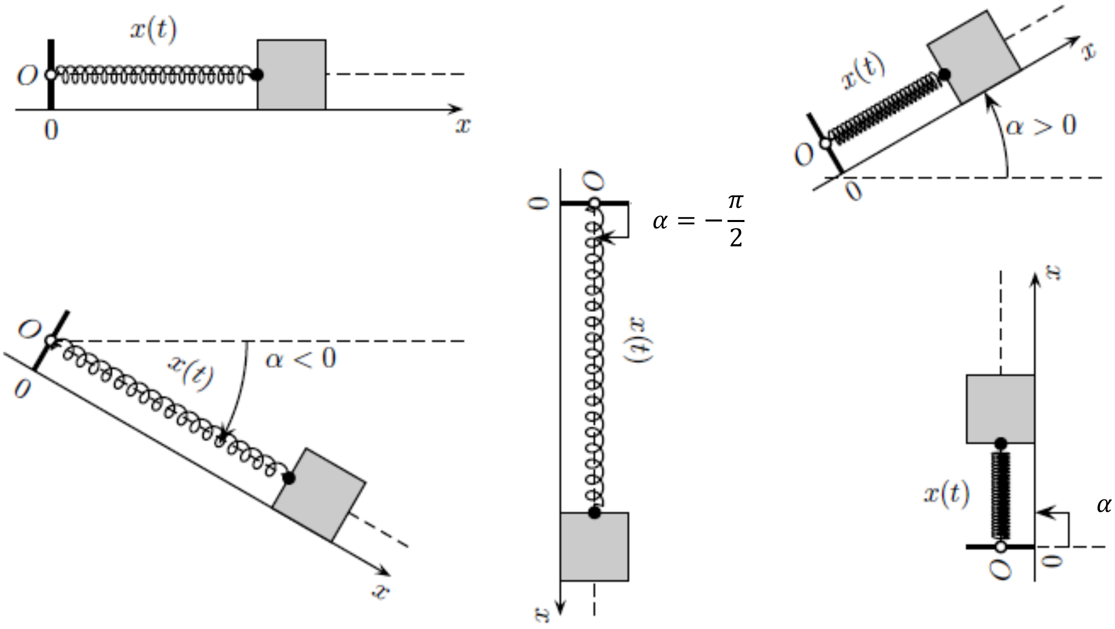
1. Effectuer un bilan des forces puis établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ à l'aide du PFD.
2. Résoudre l'équation à l'aide des conditions initiales. En déduire l'amplitude des oscillations.

Pour aller plus loin

Exercice 6 : Positions d'équilibre

On étudie le système {point M de masse m} lié à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. On considère le ressort comme idéal et on néglige tout frottement. Le point est repéré par son abscisse x.

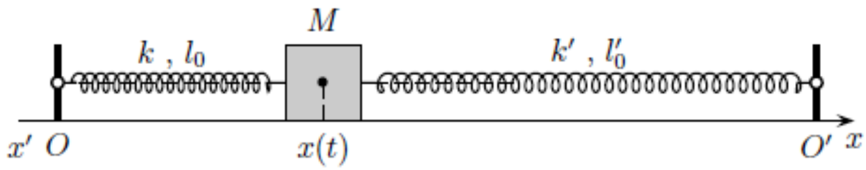
1. Rappeler l'expression de la longueur à l'équilibre d'un ressort dans le cas où l'axe Ox est horizontal ou vertical.
2. Dans le cas où l'axe Ox fait un angle α avec l'horizontale, déterminer par homogénéité et cohérence l'expression de x_{eq} en fonction de m, g, k, l_0 et α parmi les propositions suivantes :
   $x_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k}cos(\alpha)$; $x_{eq} = l_0 + \frac{k}{mg}cos(\alpha)$; $x_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k}sin(\alpha)$ ou $x_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}sin(\alpha)$.
   On pourra s'aider des situations ci-après.



3. Vérifier la cohérence de votre résultat avec les deux cas de la question 1.

Exercice 7 : Masse reliée à deux ressorts***

Une masse quasiment ponctuelle m positionnée en M est reliée à deux ressorts fixés en O et O'. Elle glisse sans frottement sur le sol horizontal.



La position de la masse est repérée par son abscisse $x(t)$ (comptée à partir de O). Les ressorts ont pour raideurs respectives k et k' et comme longueur à vide l_0 et l'_0. La longueur OO' est notée L.

1. Effectuer un bilan des forces sur la masse.
2. Etablir l'équation différentielle du mouvement de la masse à l'aide du PFD.
3. Quelle est la position d'équilibre x_{eq} et la pulsation propre du système ?
4. Sans résoudre l'équation différentielle, décrire le mouvement de la masse.
5. Résoudre l'équation précédente en considérant qu'initialement $x(0) = x_0$ et $v(0) = 0$.

<u>Capacités exigibles :</u>

- Etablir et reconnaître l'équation différentielle canonique d'un oscillateur harmonique.
- Etablir l'expression de la pulsation propre des oscillations.
- Exprimer sa solution compte tenu des conditions initiales.
- Caractériser le mouvement en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.
- Déterminer, en s'appuyant sur une analyse dimensionnelle, la position d'équilibre et le mouvement d'une masse fixée à un ressort vertical.
- Réaliser le bilan énergétique du circuit LC.