# NOTIONS AU PROGRAMME

**Reprise du programme de la semaine 3**

**Compléments d'algèbre linéaire**

1) Famille quelconque de vecteurs :
   (a) Définition d'une famille libre, d'une famille génératrice, d'une base en dimension quelconque, Notamment familles de $\mathbb{K}[X]$
   (b) Application linéaire et famille libre, resp. génératrice.
2) Sous-espaces vectoriels
   (a) Définition de la somme de $n$ sous-espaces vectoriels,
   (b) Somme directe : Définition de la somme directe de $n$ sev,
   caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul *(seule caractérisation au programme)*,
   base adaptée à une décomposition en somme directe.
   (c) Hyperplan d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n$ : définition comme sev de dimension $n-1$, équations.
   ***La définition d'un hyperplan vectoriel doit être connue, mais le théorème quant à lui n'est plus un attendu du programme, il a été vu en complément et les étudiants doivent retravailler la démonstration du théorème***
   (d) Théorème de caractérisation des hyperplans : Soient $E$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n$ et $H$ un sev de $E$.
   Les 3 propositions suivantes sont équivalentes :
      (i) $H$ est un hyperplan vectoriel de $E$
      (ii) il existe une droite vectorielle $D$ telle que $E = H \oplus D$
      (iii) il existe une forme linéaire non nulle $f$ telle que $H = \text{Ker}\,(f)$
3) Sous-espaces stables - projections et symétries
   (a) Sous-espace stable par un endomorphisme, matrice dans une base adaptée, interprétation d'une forme matricielle par blocs en termes de sous-espaces stables.
   (b) Projection, Projecteur
   Définition d'une projection, éléments caractéristiques ;
   Définition d'un projecteur de $E$, caractérisation des projecteurs
   $\big($savoir montrer en exercice en étant un peu guidé que $E = \text{Ker}\,(p) \oplus \text{Im}\,(p)$, $\text{Im}\,(p) = \text{Ker}\,(Id_E - p)\big)$.
   (c) Symétrie, Involution linéaire
   Définition d'une symétrie, projection associée, éléments caractéristiques ;
   Définition d'une involution linéaire, caractérisation des involutions linéaires.
4) Compléments sur les matrices
   (a) Trace d'une matrice : Définition,
   la trace est une forme linéaire non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$,
   Deux matrices semblables ont la même trace, mais la réciproque est fausse.
   (b) Trace d'un endomorphisme
   (c) Transposée d'une matrice : Définition, Notation : $A^\top$,
   Opérations sur les transposées : Combinaison linéaire, produit, inverse, $\text{Tr}(A^\top) = \text{Tr}(A)$.
   Définition des matrices symétriques, antisymétriques, $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\big($à savoir montrer en exercice$\big)$.

# QUESTION DE COURS sur 5 points :

*Chaque étudiant traite une des questions de cours suivantes*

1) Définition d'un hyperplan vectoriel + théorème de caractérisation des projecteurs
2) Dans le théorème de caractérisation des hyperplans(qui sera redonné), démonter que (i)$\Rightarrow$(ii).
3) Définition d'un sev stable par un endomorphisme + théorème de caractérisation des involutions linéaires
4) Définition et propriétés de l'application Tr + montrer que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
5) Définition de $S_n(\mathbb{K})$, de $A_n(\mathbb{K})$ et propriétés *(pour info voici ce que les étudiants doivent restituer : sev, bases, dimensions, $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ supplémentaires dans $M_n(\mathbb{K})$)*
6) Démontrer qu'une forme linéaire non nulle sur $E$ est surjective + Dans le théorème de caractérisation des hyperplans(qui sera redonné), démonter que (iii)$\Rightarrow$(i).

 