Annexe TP : Mesures et incertitudes

I. Variabilité et incertitude-type.

1. Variabilité.

Lors de plusieurs mesures d'une grandeur physique, il n'est pas rare d'obtenir différents résultats, sensiblement proches les uns des autres. C'est ce que l'on appelle la **variabilité de la mesure**.

Cette variabilité est naturelle, elle fait partie du processus de mesure. Elle est liée à de nombreux paramètres comme :

- L'instrument de mesure utilisé (chaque instrument est unique)
- Le choix de la méthode de mesure
- Les aléas extérieurs (variation de température, échauffement des composants électroniques, …)

Lors d'une expérience, on cherche en général à diminuer cette variabilité en choisissant les paramètres expérimentaux les plus appropriés à notre mesure.

Quantifier la variabilité d'une mesure apportera de nombreuses informations par rapport au processus de mesure qui a été mis en œuvre.

Ce document vous donne les méthodes à connaître en CPGE pour évaluer la variabilité d'une mesure, afficher correctement le résultat d'une mesure et analyser les valeurs obtenues.

2. Incertitude-type.

Pour quantifier la variabilité d'une mesure x, on introduit une grandeur appelée **incertitude-type** notée $\boldsymbol{u(x)}$ (de même unité que x) qui caractérise la dispersion des mesures.

L'incertitude-type correspond à **l'écart-type** de la distribution des résultats obtenus lors d'un grand nombre de mesures. Plus l'incertitude-type est grande, plus les résultats seront dispersés.

<u>*Remarques :*</u>
- On peut également définir **l'incertitude-type relative :** $\boldsymbol{u(x)/x}$, que l'on exprimera en %.
- *Les méthodes de détermination de l'incertitude-type sont exposées dans la partie II.*

3. Écriture du résultat de mesure.

Le résultat d'une mesure dont on connaît l'incertitude-type doit être écrit sous la forme :

$$x = \ldots \text{ unité}, \quad u(x) = \ldots \text{ unité}$$

où l'incertitude-type $u(x)$ est indiquée avec **2 chiffres significatifs**.

Pour l'affichage de la grandeur mesurée, on prendra comme dernier chiffre significatif, celui de même position (au sens numération) que celui de l'incertitude.

<u>*Exemple :*</u> On mesure une distance d en cm.
Si on a obtenu : $d = 17{,}345$ cm avec une incertitude-type $u(d) = 0{,}1634$ cm :

> *On ne garde que 2 chiffres significatifs pour u(d) :* $u(d) = 0{,}16$ cm.
> *Ce résultat étant au centième près, on arrondit d au centième également :* $d = 17{,}35$ cm

On devra ainsi écrire le résultat sous la forme :

$$d = 17{,}35 \text{ cm} \; ; \; u(d) = 0{,}16 \text{ cm}$$

4. Comparaison de deux mesures. Écart-normalisé.

Pour comparer deux mesures entre elles, il faut définir un critère pour indiquer si elles sont **compatibles ou incompatibles**.

Supposons que nous avons deux mesures : x_1, d'incertitude-type $u(x_1)$ et x_2, d'incertitude-type $u(x_2)$.

On définit **l'écart normalisé (ou « z-score »)** par la formule :

$$Z = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}}$$

Par convention, on qualifie souvent deux résultats de compatibles si leur écart normalisé est **inférieur ou égal à 2**.

Remarque : Ce seuil dépend des domaines scientifiques étudiés et de la précision souhaitée. Il peut être abaissé ou relevé selon les cas.

II. Estimation du résultat d'une mesure et de l'incertitude type.

1. Évaluation de type A de l'incertitude type. (Grand nombre de mesures)

Si l'on peut réaliser N fois le protocole de mesure, nous obtiendrons un ensemble de résultat expérimentaux $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$. On réalise alors un traitement statistique.

- La meilleure estimation du résultat de la mesure est donnée par la moyenne :

$$x = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{N}$$

- On définit l'écart type de cet ensemble par la formule :

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_N - \bar{x})^2}{N - 1}}$$

- L'incertitude-type est alors donnée par :

$$u(x) = \frac{\sigma(x)}{\sqrt{N}}$$

Remarques :
- Plus le nombre de mesures sera important, plus l'incertitude-type sera faible.
- Il est vivement conseillé d'effectuer ce traitement statistique dans un tableur (Excel) dont on pourra utiliser les formules :
  = MOYENNE(…) et = ECARTYPE(…)

2. Évaluation de type B de l'incertitude type. (Mesure unique)

Lorsque qu'on effectue une seule mesure, la détermination statistique n'est pas possible.

Il faut alors s'intéresser aux spécifications du fabricant de l'appareil de mesure, à des mesures antérieures, à des étalonnages, etc.

On utilise en général la convention suivante :

Si on est sûr de trouver notre valeur dans un intervalle : $[x - \Delta, x + \Delta]$ (x représente le milieu de l'intervalle et Δ sa demi-largeur).
Le résultat de la mesure correspond à x, milieu de l'intervalle, et l'incertitude-type est :

$$u(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$$

Exemples :

- *Sur un banc d'optique, avec un objet et un écran fixé, il existe un intervalle de positions de la lentille $x \in [x_{\min}; x_{\max}]$ pour lesquelles on obtient une image nette sur l'écran.*
  On choisit alors $x = \frac{x_{min}+x_{max}}{2}$ et $\Delta = \frac{x_{max}-x_{min}}{2}$. On en déduit : $u(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$
- **Si le constructeur d'un appareil fournit une indication de type Δc** (souvent nommée « précision ») sans aucune information, l'incertitude-type est : $u(x) = \frac{\Delta c}{\sqrt{3}}$.
- **Si on mesure à l'aide d'une règle graduée,** le demi-intervalle correspond à une demi-graduation : *Δ = 0,5 graduation*

3. Composition des incertitudes-types (Calcul)

Il faut souvent effectuer des opérations mathématiques à l'aide des mesures pour obtenir le résultat final. Pour combiner entre elles les incertitudes-types, on utilise les conventions suivantes :

Si $y = x_1 \pm x_2$ alors :

$$u(y) = \sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}$$

Si $y = x_1 \times x_2$ ou $y = x_1/x_2$ alors :

$$u(y) = |y|\sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$$

Seules ces deux formules sont à connaître. Si les opérations sont plus compliquées, on effectue alors une **simulation informatique** dite « Méthode de Monte Carlo » :

Exemple de simulation par la méthode de Monte Carlo :

On dispose de deux résistors R_1 et R_2 pour lesquelles on est quasi-sûr que :

$$R_1 \in [\mathrm{R_1} - \Delta_1, \mathrm{R_1} + \Delta_1] \text{ et } R_2 \in [\mathrm{R_2} - \Delta_2, \mathrm{R_2} + \Delta_2]$$

On cherche à connaître l'incertitude type sur la résistance équivalente : $R_{eq} = \frac{R_1.R_2}{R_1+R_2}$

- On génère aléatoirement une valeur de R_1 comprise entre $[\mathrm{R_1} - \Delta_1, \mathrm{R_1} + \Delta_1]$ et une valeur de R_2 comprise entre $[\mathrm{R_2} - \Delta_2, \mathrm{R_2} + \Delta_2]$. On en déduit une valeur de R_{eq}.
- On répète N fois cette procédure pour obtenir N valeurs aléatoires de R_{eq}.
- Le résultat de la mesure (R_{eq}) est alors la valeur moyenne de cette distribution.
- L'incertitude-type correspond à l'écart-type de cette distribution.

Voici ci-dessous le script en langage python permettant d'effectuer cette simulation pour deux résistors $R_1 = 100\ \Omega$ et $R_2 = 200\ \Omega$ de tolérance 5% (code couleur : or) :

$$R_1 \in [100 - 0{,}05 \times 100\,; 100 + 0{,}05 \times 100] \text{ et } R_2 \in [200 - 0{,}05 \times 200\,; 200 + 0{,}05 \times 200]$$

```
import random as rd # bibliotheque pour les valeurs aléatoires
import numpy as np # bibliotheque numpy pour les calculs

# Paramètres d'étude de R1 :
R1=100
Delta1=5 # 5% de R1 d'après la tolérance constructeur

# Paramètres d'étude de R1 :
R2=200
Delta2=10 # 5% de R2 d'après la tolérance constructeur

Req=[] # liste qui stockera les résultats de la simulation

N = 10000 # nombre d'échantillons simulés

for i in range(N):
    # generation des valeurs aléatoires
    r1=np.random.uniform(R1-Delta1,R1+Delta1)
    r2=np.random.uniform(R2-Delta2,R2+Delta2)
    req=r1*r2/(r1+r2)
    Req.append(req) # ajout dans la liste d'échantillons

# calcul de la moyenne

moyenne=np.average(Req)
print("la valeur mesurée est : ",moyenne)

# calcul de l'écart-type

sigma=np.std(Req)
print("l'incertitude-type est : ",sigma)
```

Le résultat affiché par ce programme est :

```
la valeur mesurée est :  66.65196589966438
l'incertitude-type est :  1.4263736779612468
```

On ajuste les chiffres significatifs avant d'écrire le résultat final :

On ne garde que 2 chiffres significatifs pour l'incertitude type : u(Req) = 1,4 Ω.
Ce résultat étant au dixième près, on arrondit Req au dizième également : Req = 66,7 Ω

On affiche le résultat sous la forme :

$$R_{eq} = 66{,}7\ \Omega\ ; incertitude\ type\ u(R_{eq}) = 1{,}4\ \Omega$$

<u>Remarque :</u> *Cette méthode utilisant une part d'aléatoire, le résultat affiché par le programme sera différent à chaque appel.*

QCM d'auto-évaluation à compléter après votre lecture :