Travaux dirigés de Mécanique n°6

Mouvement à force centrale : **Exercice 1 : Force centrale élastique**

Un point matériel M sur un plan Π subit une force $\vec{F} = -k\overrightarrow{OM} = -kr\vec{e_r}$ où k est une constante positive.

1. Exprimer le moment cinétique par rapport à O dans R en fonction de $C = r^2\dot{\theta}$.
2. Montrer que le moment cinétique est constant. En déduire les propriétés du mouvement.
3. Montrer que l'énergie mécanique se conserve.
4. Exprimer l'énergie mécanique en fonction de r, $\dot{r}$, C, k.
5. Donner l'expression de l'énergie potentielle effective. Tracer sa courbe en fonction de r.
6. Etant donnée l'énergie mécanique initiale E_0, montrer que le mouvement se fait toujours entre deux valeurs limites r_1 et r_2.
7. Pour quelle valeur de E_0 le mouvement de M est-il circulaire ?
8. Quel est le rayon de la trajectoire ? Quelle est la vitesse de M ?

Trajectoires circulaires :

Exercice 2 : Satellite Géostationnaire.

Dans le référentiel géocentrique (supposé galiléen), un satellite artificiel de masse m se déplace suivant une orbite circulaire de rayon $r_0 = R_T+h$ autour du centre de la Terre (h étant son altitude par rapport à la surface terrestre).

1. A l'aide du PFD, déterminer la vitesse v_0 du satellite en fonction de $\mathcal{G}$, M_T, R_T et h.
2. En déduire la période T du mouvement, et montrer que la constante T^2/r_0^3 a la même valeur pour tous les satellites. Quelle est la loi équivalente pour le système solaire ?
3. Exprimer l'énergie potentielle E_{p0}, cinétique E_{c0} et mécanique E_{m0} du satellite sur cette orbite en fonction de la constante de gravitation $\mathcal{G}$, de la masse de la Terre M_T et des données. Commenter le signe de l'énergie mécanique.
4. Un satellite est dit géostationnaire s'il est immobile par rapport au référentiel terrestre. Il reste constamment au dessus d'un point fixe de la Terre.
   a. Dans quel plan doit obligatoirement évoluer un tel satellite ?
   b. Quelle est sa période. En déduire son altitude h et commenter.
5. Pour que le satellite puisse tourner, il faut d'abord le lancer. On suppose, qu'avant d'être placé sur son orbite, le satellite est posé sur le sol, en un point P de latitude λ. Sa vitesse est la vitesse d'entrainement $\vec{v_e}$ due à la rotation de la Terre, supposée sphérique de rayon R_T.
   a. Déterminer E_{p1}, E_{c1} et E_{m1} du satellite au point P.
   b. Calculer le travail W que la fusée doit fournir au satellite pour le mettre sur orbite.
   c. Où doit-on placer les bases de lancement pour que W soit minimale ?
   d. Calculer, en pourcentage, l'économie réalisée entre un lancement depuis l'équateur (λ_1=0) et un lancement depuis le nord de l'Europe (λ_2=55°), pour h<<R. Commenter.
6. On suppose maintenant que l'altitude du satellite étant faible devant R_T, il subit les frottements de l'atmosphère. Son énergie mécanique E_m diminue avec le temps selon la loi $E_m = E_{m0}(1+\alpha t)$. Quel est le signe de α? On suppose que la trajectoire reste pratiquement circulaire. Déterminer en fonction de t, le rayon r de la trajectoire, et la vitesse v du satellite. Comment v varie-t-elle ? Commentez.

Exercice 3 : L'atome de Bohr

L'atome d'hydrogène est constitué d'un proton O, de masse m_p et de charge +e, et d'un électron M, de masse $m_e << m_p$ et charge –e, ayant un mouvement circulaire uniforme de rayon r et de vitesse v, autour de O. Dans le modèle de Bohr, le moment cinétique de l'électron est quantifié : $L_0(M) = n\dfrac{h}{2\pi}$, où n est un entier et h est la constante de Planck. Le référentiel d'étude est supposé galiléen.

1. Déterminer une relation entre r, v, m, n et h.
2. Sachant que l'électron n'est soumis qu'à la force d'interaction électrostatique $\vec{F} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$, déterminer une nouvelle relation entre r et v.
3. En déduire que r se met sous la forme $n^2 r_0$; on calculera alors r_0.
4. Montrer que l'énergie mécanique de l'électron se met sous la forme : $E_m = -\frac{E_0}{n^2}$.
5. En supposant que l'électron est dans son état fondamental ($n=1$), calculer la vitesse de l'électron ainsi que l'énergie d'ionisation de l'atome (l'exprimer en eV).

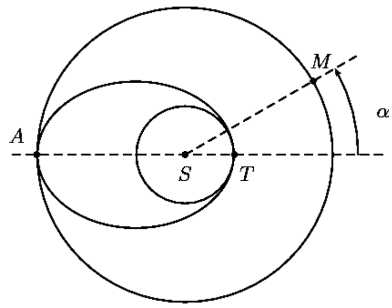
Données : $h = 6,64.10^{-34} J.s$; $e = 1,6.10^{-19} C$; $\varepsilon_0 = 8,84.10^{-12} C^2.N^{-1}.m^{-2}$; $m_e = 9,1.10^{-31} kg$.

A propos des trajectoires elliptiques : On rappelle que l'équation polaire d'une ellipse se met sous la forme : $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$ où $0<e<1$. L'énergie mécanique d'un point matériel sur cette trajectoire se met sous la forme $E = \frac{-k}{2a}$, avec a la demi grand axe de l'ellipse.

Exercice 4 : Troisième loi de KEPLER.

1. Sachant que la trajectoire de la Terre est presque un cercle de rayon $a = 150.10^6 km$ et que la constante de gravitation $\mathcal{G}$=6,67.10^{-11}SI, calculer la masse du soleil.
2. La période de révolution de Mars autour du Soleil est de 1,9 années, en déduire *a'* le demi grand axe de l'ellipse décrite par Mars autour du soleil.
3. Une comète décrit une orbite elliptique autour du soleil, avec une période de 11,5 années. La distance au périgée est $r_P = 0,22a$ (a : distance terre soleil si on considère le mouvement de la Terre autour du Soleil comme circulaire), calculer la distance r_A de l'apogée au soleil et l'excentricité e de la trajectoire elliptique. e étant proche de 1, calculer la vitesse maximale de la comète.
4. La comète de Halley est passée en 1986 au voisinage de la Terre. Sa période de révolution autour du Soleil est de 76 ans et sa distance minimale au Soleil est 0,59 u.a (unité astronomique correspondant à la distance moyenne Terre Soleil). Calculer la plus grande distance de cette comète au Soleil et l'excentricité de sa trajectoire.

Exercice 5 : Mission to Mars.



Un vaisseau spatial de masse $m = 1000 kg$ est transféré depuis la Terre T jusqu'à la planète Mars M. Ce transfert s'effectue selon une orbite elliptique (ellipse d'HOHMANN) tangente aux deux orbites coplanaires pratiquement circulaires, de T et M, de rayons r_T=150 millions de km et r_M=230 millions de km, et dont le soleil est un des foyers.

On négligera l'influence des autres corps et on ne considèrera que l'attraction solaire. Masse du Soleil $M_s = 2.10^{30} kg$ et $\mathcal{G}$=6,67.10^{-11}SI.

Déterminer en fonction de r_T, r_M, $\mathcal{G}$ et M_S, puis calculer :

1. L'excentricité e et le paramètre p de l'orbite de transfert d'HOHMANN.
2. La durée τ du voyage
3. La variation de vitesse à communiquer au vaisseau lors du lancement depuis l'orbite terrestre puis lors de son arrivée aux abords de Mars.
4. L'augmentation de l'énergie mécanique totale du vaisseau au cours de ce transfert
5. La position que doit avoir M par rapport à T à l'instant de départ : angle α.