Travaux dirigés de Mécanique n°4

Oscillations libres :

Exercice 1 : Mesure d'un coefficient de viscosité

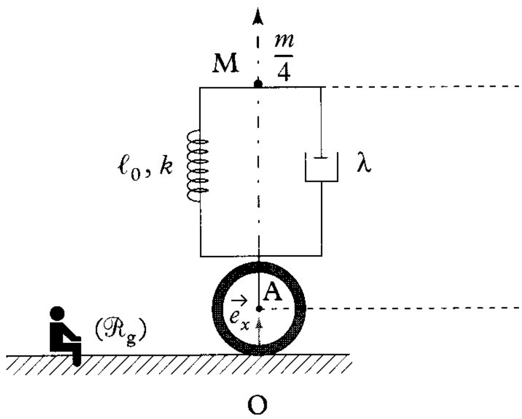
Une sphère de rayon R est animée d'une vitesse $\vec{v}$, plongée dans un liquide de viscosité η, est soumise à une force de frottement qui, lorsque la vitesse est faible (régime laminaire), a pour expression : $\vec{F}_S = -6\pi\eta r\vec{v}$.

Une telle sphère de masse m est suspendue à un ressort de raideur k. Sa période d'oscillation dans l'air, où le frottement est négligeable est T_0.

On la plonge dans un liquide de coefficient de frottement η; sa pseudo-période est alors T. Donner l'expression de η en fonction des caractéristiques de la sphère, de T et T_0.

Note : on posera $2\alpha = \frac{6\pi\eta R}{m}$ et on négligera la poussée d'Archimède.

Exercice 2 : Amortisseur de voiture.

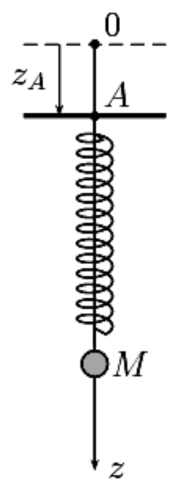


On modélise l'amortisseur d'une roue de voiture à l'aide d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0, en parallèle avec un amortisseur de coefficient de frottement λ. Une masse $m/4$ est posée sur ce dispositif et peut se déplacer verticalement le long de l'axe $\left(0;\vec{e}_x\right)$ lié au référentiel terrestre supposé galiléen. Donnée : m=1200kg.

1. Lors du changement d'une roue, on soulève d'une hauteur h=25cm la masse $m/4$, ce qui correspond au moment où la roue (de masse négligeable) ne touche plus le sol : AM vaut alors 40cm. En déduire la valeur de l_0, l_{eq} et k.
2. Déterminer et calculer λ afin que le dispositif fonctionne en régime critique (roue sur le sol à l'arrêt et masse $m/4$ en mouvement vertical).
3. On enfonce la masse $m/4$ d'une hauteur d=5cm et on lâche le système à t=0 sans vitesse initiale. Déterminer l'évolution de l'altitude x de la masse $m/4$.
4. On charge maintenant l'amortisseur au maximum : la masse totale du véhicule vaut m=2200kg. Déterminer les paramètres de l'amortisseur Q et ω_0. Tracer l'allure de la réponse lorsqu'on enfonce de x_0=5cm la masse $m/4$ et qu'on la lâche sans vitesse initiale à t=0. Conclure.

Oscillations forcées :

Exercice 3 : Ressort vertical



On considère le système représenté ci-contre : une bille M, quasi ponctuelle, de masse m est suspendue à un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k.

L'autre extrémité du ressort (notée A) est liée à un système qui lui assure un mouvement vertical d'amplitude D et de pulsation ω.

On tiendra compte d'une force de frottement $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ s'exerçant sur M.

1. Déterminer la position z_{eq} de M à l'équilibre de M et A.
2. Etablir l'équation différentielle dont z est la solution.
3. Donner l'expression de l'amplitude des oscillations de M en régime forcé.

Exercice 4 : Modélisation d'un haut parleur.

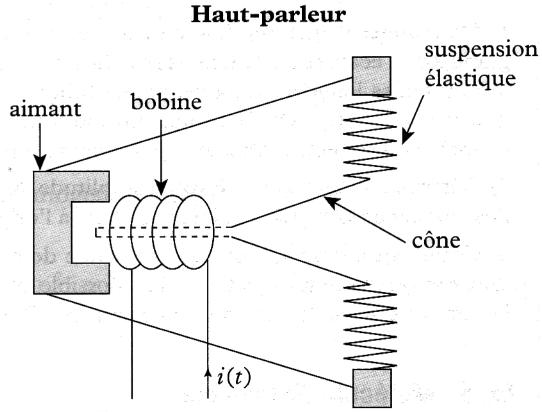
On modélise la partie mécanique d'un haut-parleur à l'aide d'une masse m, se déplaçant horizontalement sans frottement le long de l'axe (O,x) ; cette masse m, assimilée à un point matériel M(m) est reliée à un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k et à un amortisseur fluide de constante f ; elle est soumise à une force $\overrightarrow{F}(t)$, imposée par le courant i(t) entrant dans le haut-parleur ; on a :

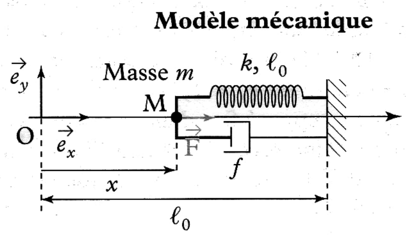
$$\overrightarrow{F}(t) = Ki(t)\overrightarrow{e_x} \text{ avec K une constante.}$$

On travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On suppose que le courant i(t) est sinusoïdal :

$$i(t) = I_m \cos(\omega t).$$

Données : m=10g ; k=15000N/m ; 200N/A ; I_m=1A.





1. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par la position de la masse m.
2. La mettre sous la forme canonique.
3. On veut $Q = 1/\sqrt{2}$. Justifier. Calculer la valeur du coefficient f.
4. Déterminer l'expression de la réponse forcée x(t) ; la mettre sous la forme $X_m \cos(\omega t + \varphi)$.
   Donnée : ω=6280rad/s
5. Tracer l'allure de la courbe donnant $\omega \to X_m(\omega)$. En déduire la bande passante du système.

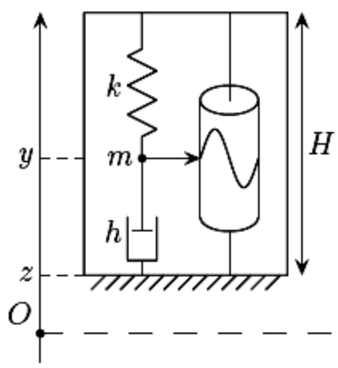
Exercice 5 : Sismographe

Un sismographe est constitué d'un ressort de raideur k et de longueur naturelle l_0, d'un amortisseur de coefficient de frottement h et d'une masse $M(m)$ considérée comme ponctuelle.

Le ressort et l'amortisseur sont fixés à un cadre rigide. L'amortisseur exerce sur la masse M une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse relative de M par rapport au cadre.

Un stylet reproduisant les déplacements verticaux de la masse m par rapport au cadre est fixé au niveau de la masse m (voir figure).

Le cadre est mis en mouvement vertical sinusoïdal : $z(t) = Z\cos(\omega t)$. Le référentiel $\Re(O,\overrightarrow{u_z})$ est supposé galiléen.



1. Déterminer l'équation d'évolution de $y(t)$, cote de la masse M dans le référentiel $\Re$.
2. En déduire l'équation d'évolution de $x(t)$, écart entre la longueur $l(t)$ du ressort à un instant t et sa longueur l_{eq} à l'équilibre.
3. Déterminer l'amplitude réelle X des oscillations de la masse et tracer l'allure pour quelques valeurs du facteur de qualité.
4. Comment choisir Q pour que X vaille Z à 5% près sur la plus grande plage de pulsations possible ?

Exercice 6 : Suspension automobile.

On étudie le mouvement vertical d'un véhicule de masse M=10^3kg. Sa suspension est modélisée par un ressort de raideur k=10^5N.m^{-1} et de longueur à vide l_0, associé à un amortisseur de constante d'amortissement $k' = 4.10^3 N.m^{-1}.s$.

La force exercée par l'amortissement est de la forme $-k'.\vec{u}$ où $\vec{u}$ est la vitesse relative des deux extrémités.

Le véhicule se déplace à vitesse constante $V_a = 50 km.h^{-1}$ sur un sol ondulé horizontal. L'ondulation est assimilée à une sinusoïde de période spatiale L=2m et d'amplitude $z_{S0} = 5cm$ comptée à partir de la ligne moyenne.

Pour des raisons de simplicité, on supposera ici que le rayon de la roue est nul, c'est à dire que le centre O de la roue suit exactement l'ondulation du sol.

1. Donner l'expression de la pulsation d'excitation ω de la suspension en fonction de la vitesse Va du véhicule et de la période spatiale L.
2. Faire un schéma pour la mise en équation du système où seront explicitées les forces agissant sur celui-ci.
3. Exprimer l'équation différentielle vérifiée par la coordonnée $z = z_V - z_{V,eq}$ liant cette dernière à la coordonnée z_s avec $z_{V,eq}$ la valeur de z_V à l'équilibre et pour z_S=0.
4. Donner les expressions de la réponse complexe $\underline{Z}/\underline{Z}_S$ ainsi que son module $|\underline{Z}/\underline{Z}_S|$ où $\underline{Z}$ est l'amplitude complexe de la grandeur complexe $\underline{z}$ associée à $z(t)$ et $\underline{Z}_S$ l'amplitude complexe de celle associée à $z_S(t)$. On posera $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ avec $\omega_0^2 = \dfrac{k}{M}$ et $Q = \dfrac{M\omega_0}{k'}$.
5. Représenter la courbe de Bode pour $|\underline{Z}/\underline{Z}_S|$. Préciser les points particuliers (origines, asymptotes, extrema) et donner leurs valeurs numériques.
6. Calculer l'amplitude des oscillations du véhicule. Préciser la fréquence des oscillations que ressentirait un passager.
7. A quelle(s) allure(s) ne faudrait-il surtout pas rouler sur ce sol ondulé ? Pour quelles raisons ?
8. A la lueur des résultats obtenus, proposer un moyen de ralentissement des véhicules à l'entrée des zones urbaines.