Géométrie élémentaire du plan : Exercices

Changement de repère orthonormal

Exercice 1

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On note A le point de coordonnées $(2, -1)$ dans ce repère et $\mathcal{H}$ l'ensemble des points de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$ telles que :

$$x^2 - y^2 = 4x + 2y - 2$$

1. (a) Démontrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe deux points M_y et N_y appartenant à $\mathcal{H}$ d'ordonnée y.
   (b) Déterminer les coordonnées du milieu de $[M_yN_y]$. Que peut-on en déduire ?
2. Montrer que $\mathcal{H}$ est symétrique par rapport à A.
3. On considère le repère $\mathcal{R}'$ image de $\mathcal{R}$ par translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ puis par rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{4}$. On note $\vec{\imath}'$ et $\vec{\jmath}$ les vecteurs de coordonnées et (x', y') les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}'$.
   (a) Exprimer (x, y) en fonction de x' et y'.
   (b) En déduire l'équation de $\mathcal{H}$ dans le repère $\mathcal{R}'$. Quelle est la nature de $\mathcal{H}$?

Exercice 2

On munit le plan d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $\mathcal{P}$ la courbe d'équation cartésienne :

$$x^2 + y^2 - 2xy - \left(6 + \sqrt{2}\right) x + \left(6 - \sqrt{2}\right) y + 9 + \sqrt{2} = 0$$

1. En considérant le point $\Omega(2, -1)$ et le repère $(\Omega, \vec{\imath}', \vec{\jmath}')$ où $\vec{\imath}'$ et $\vec{\jmath}'$ sont les images de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}'$ par rotation d'angle $-\frac{\pi}{4}$, exprimer les formules de changement de repère orthonormal.
2. Donner l'équation de $\mathcal{P}$ dans le repère $(\Omega; \vec{\imath}', \vec{\jmath}')$.
3. En déduire que $\mathcal{P}$ est une parabole.

Coordonnées cartésiennes et polaires

Exercice 3

On munit le plan d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On donne les points suivants, définis par leurs coordonnées polaires :

$$A\left(1, \frac{\pi}{4}\right) \qquad B\left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right) \qquad C\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$$

1. (a) Représenter ces points et donner leurs coordonnées cartésiennes.
   (b) Justifier que ces points sont alignés sur une droite passant par O.
2. Donner les coordonnées polaires de A, B, C et O dans le repère $(A; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Calculs de produits scalaires

Exercice 4

On considère un hexagone régulier $ABCDEF$ inscrit dans un cercle de rayon 1 et de centre O.
Calculer les produits scalaires suivants :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \qquad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} \qquad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE}$$

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DF} \qquad \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{DB} \qquad \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CE}$$

Exercice 5

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour norme respectives 4 et 6. Leur produit scalaire est égal à 8. Calculer :

$$\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) \qquad 2\vec{u}\cdot(-4\vec{v}) \qquad (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$$

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 \qquad (\vec{u}-\vec{v})^2 \qquad (2\vec{u}+3\vec{v})\cdot(3\vec{u}-2\vec{v})$$

Exercice 6

Soient $\vec{u}(2,1)$ et $\vec{v}(2-\sqrt{3},1+2\sqrt{3})$ deux vecteurs du plan. Calculer une mesure de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$.

Exercice 7

Soient A, B et C trois points du plan et f l'application qui à tout point M du plan associe :

$$f(M)=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}$$

1. Démontrer que f est la fonction nulle.
2. (Re)démontrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Exercice 8 – Théorèmes de la médiane

Soit ABC un triangle et I le milieu de BC.

1. Démontrer le théorème suivant (dit théorème d'Appolonius ou premier théorème de la médiane) :

$$AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{BC^2}{2}$$

2. Démontrer le théorème suivant (dit second théorème de la médiane) :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AI^2-IB^2$$

Exercice 9 – Puissance d'un point par rapport à un cercle

Soit un cercle $\mathcal{C}$ de rayon r, de centre O et M un point quelconque du plan. Soit enfin une droite d passant par M et coupant $\mathcal{C}$ en deux points A et B.

1. En notant A' le point diamètralement opposé à A dans le cercle$\mathcal{C}$, démontrer que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'}$.
2. Démontrer que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'}=MO^2-OA^2$ et en déduire que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MO^2-r^2$.

Exercice 10

Soit un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ et de centre O. Soit $C\in\mathcal{C}$ se projettant orthogonalement en H sur $[AB]$. Une droite d passant par A coupe (CH) en N et $\mathcal{C}$ en M.

1. Démontrer que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$.
2. En déduire que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=AC^2$.

Exercice 11

Le plan est muni d'un repère orthonormal. Déterminer la distance du point $A(1,4)$ à la droite de représentation polaire $\theta=\frac{2\pi}{3}$ (π).

Calculs de déterminant

Exercice 12

Soit ABC un triangle équilatéral direct de côté 4 et I, J et K les points tels que BIC, CJA, AKB sont trois triangles isocèles rectangle en I, J et K.

Calculer les déterminants suivants :

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \qquad \mathrm{Det}(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AJ}) \qquad \mathrm{Det}(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BJ}) \qquad \mathrm{Det}(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AI})$$

Exercice 13

Dans le plan orienté, deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour norme respectives 2 et 3 et $(\vec{u},\vec{v}) = -\frac{\pi}{6}\ (2\pi)$. Calculer :

$$\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{u}-\vec{v}) \qquad \mathrm{Det}(4\vec{u},-3\vec{v}) \qquad \mathrm{Det}(\vec{u}+\vec{v},\vec{u}+\vec{v}) \qquad \mathrm{Det}(\vec{u}-2\vec{v},2\vec{u}+\vec{v})$$

Exercice 14

Soit un triangle ABC. Déterminer le point D tel que l'aire de ABD est égale à $\frac{3}{5}$ de l'aire de ABC, l'aire de BCD est égale à $\frac{1}{5}$ de l'aire de ABC.

Exercice 15

Soit un rectangle $ABCD$. I et J désignent les milieux de $[AB]$ et $[BC]$.

1. Démontrer que (IC) et (JD) sont perpendiculaires si et seulement si $ABCD$ est un carré.
2. On suppose que $ABCD$ est un carré direct de côté a. Calculer et $\mathrm{Det}(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{JD})$ en fonction de a et interpréter le résultat.

Lignes de niveau

Exercice 16

On munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère cartésien orthonormal. Soit $A(2,1)$, $B(2,4)$ et $\vec{u}(-1,3)$.

1. (a) Déterminer l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=0$.
   (b) Déterminer l'ensemble des points M tels que $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=3$.
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}+2\vec{u}\cdot\overrightarrow{BM}=0$.
3. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$.
4. (a) Déterminer l'ensemble des points M tels que $\mathrm{Det}(\overrightarrow{AM},\vec{u})=3$.
   (b) Déterminer l'ensemble des points M tels que $\mathrm{Det}(\overrightarrow{AM},\vec{u})=\mathrm{Det}(\overrightarrow{BM},\vec{u})$.

Représentations paramétriques et équation cartésiennes de droites

Exercice 17

On munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère cartésien orthonormal et on considère la droite d de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3-t \\ y = -1+2t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

1. Déterminer une équation cartésienne de d.
2. Déterminer une équation de d' parallèle à d passant par le point de coordonnées $(1,1)$.
3. Soit $m\in\mathbb{R}$. On considère la famille de droites Δ_m d'équations cartésiennes :

$$mx+(m-1)y+2=0$$

   (a) Pour quelle valeur de m, Δ_m est-elle parallèle à d ?
   (b) Pour quelle valeur de m, Δ_m est-elle perpendiculaire à d ?

Exercice 18 – Droite d'Euler

On munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère cartésien orthonormal et on considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1,1)$, $(3,7)$ et $(-1,3)$.

1. (a) Déterminer une équation cartésienne de chacune des trois médianes du triangle ABC.
   (b) Vérifier que G isobarycentre de A, B et C est l'intersection de ses médianes.
2. (a) Déterminer une équation cartésienne de chacune des trois médiatrices du triangle ABC.
   (b) Vérifier que ces trois médiatrices sont concourantes en un point noté O.
3. (a) Déterminer une équation cartésienne de chacune des trois hauteurs du triangle ABC.
   (b) Vérifier que ces trois médiatrices sont concourantes en un point noté H.
4. Démontrer que les points G, O et H sont alignés.

Distance d'un point à une droite

Exercice 19

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère le point $A(2,2)$ et la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t-2 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

1. Donner une équation cartésienne de d.
2. En déduire $\mathrm{d}(A,d)$.

Exercice 20

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère les droites définies par :

$$d_1 \ : \begin{cases} x = \sqrt{3}t \\ y = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \quad d_2 \ : x = 0$$

1. Représenter d_1 et d_2.
2. Démontrer que le point $A(1,\sqrt{3})$ est équidistant de ces deux droites et en déduire l'équation polaire de (OA).

Équation cartésienne de cercle

Exercice 21

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, préciser la nature de l'ensemble des points M de coordonnées (x,y) vérifiant :

$$x^2+4x+y^2-6y=8 \qquad x^2+2x+y^2+3=0 \qquad 2x^2+x+2y^2-y=8$$

Exercice 22 – Cercle circonscrit à un triangle

On munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère cartésien orthonormal et on considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1,3)$, $(5,1)$ et $(-1,-1)$.

1. Déterminer une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC.
2. Préciser son centre et son rayon.

Exercice 23

Résoudre et intérpréter graphiquement le système suivant :

$$\begin{cases} x^2+y^2-6x+2y=10 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$$

Intersection cercle et droite

Exercice 24

On munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère cartésien orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et on considère les points A et B de coordonnées respectives $(1, 4)$ et $(3, 2)$.

1. Donner l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 3.
2. (a) On note I l'intersection de (AB) et $\mathcal{C}$ la plus proche de B. Déterminer les coordonnées de I.
   (b) Donner une équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{C}$ passant par I.
3. (a) Donner des équations cartésiennes des tangentes à $\mathcal{C}$ passant par O.
   (b) En donner également des équations polaires.

Similitudes du plan

Exercice 25

On munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et de sa structure complexe associée. A et B sont deux points d'affixes 12 et 9i. s est la similitude directe d'écriture complexe :

$$z' = -\frac{3}{4}\mathrm{i}z + 9\mathrm{i}$$

1. Donner les éléments caractéristiques de s. Ω désignera le centre de s.
2. Déterminer $s(A)$ et $s(O)$.
3. (a) Démontrer que Ω est un point commun aux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de diamètres $[OA]$ et $[OB]$.
   (b) Démontrer que Ω est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB et que $\Omega A \times \Omega B = \Omega O^2$.

Exercice 26

On munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et de sa structure complexe associée. $ABCD$ est un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$. P est un point de $[BC]$ distinct de B, Q est l'intersection de (AP) et (CD) et la perpendiculaire Δ à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.

1. r désigne la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Quelle est l'image par r de (BC) ? de R ? de P ?
2. Quelle est la nature des triangles RAQ et PAS ?
3. (a) On note N et M les milieux de $[PS]$ et $[QR]$ et s est la similitude directe de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$. Déterminer $s(R)$ et $s(P)$.
   (b) Quel est le lieu géométrique de N quand P décrit $]BC]$? En déduire que M, B, N et D sont alignés.